Prof. Annette Huber-Klawitter
Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2024/25

Semi-algebraische Geometrie

Blatt 11

Abgabe: 17.01.2025 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

Sei R ein reell abgeschlossener Körper und $C = R(\sqrt{-1})$ ein algebraischer Abschluss.

(i) Zeigen Sie, dass das von $X^2 + Y^2$ erzeugte Ideal in $C[X, Y]$ radikal ist, das heißt der Ring $C[X, Y]/(X^2 + Y^2)$ besitzt keine nilpotenten Elemente verschieden von Null.

(ii) Schließen Sie daraus, dass das von Z erzeugte Ideal $\mathcal{I}$ in $R[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 - Z)$ radikal ist.

(iii) Ist $\mathcal{I}$ ein reelles Ideal?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

Sei G eine semi-algebraische Gruppe und X eine semi-algebraische τ-offene Teilmenge von G. Zeigen Sie, dass alle τ-Komponenten von X ebenfalls τ-offen sind.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**

Sei K ein semi-algebraischer Körper mit $\dim(K) \geq 2$ versehen mit der τ-Topologie aus der Vorlesung. Sei die Gruppe $(K, +)$ τ-zusammenhängend.

(i) Sei $X \subsetneq K^*$ eine nicht-leere Menge, die τ-offen und τ-abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass für λ aus K^* die Menge $\lambda \cdot X$ auch τ-offen und τ-abgeschlossen ist

(ii) Zeigen Sie überdies, dass 0 ein Häufungspunkt von X ist.

(iii) Beweisen Sie: Es gibt eine semi-algebraische Umgebung U von 0 derart, dass $U \setminus \{0\}$ τ-zusammenhängend ist.

(iv) Schließen Sie, dass $(K^*, \cdot)$ τ-zusammenhängend ist.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 47 im dritten Stock des mathematischen Instituts.